Spezielle Bewegungsformen des schweren symmetrischen Kreisels.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät II. Sektion
der Kgl. Ludwigs-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt am 14. Februar 1911

von

Valentin Scheidel.

ACAD.
LUDOVIC.
BIBL

München 1912.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548308_0089

Bei der Behandlung der Theorie des Kreisels wird in den Lehrbüchern ausgegangen von den speziellen Bewegungsformen, die sich durch elementare Funktionen darstellen lassen. Zwischen diese speziellen Fälle werden dann die allgemeinen, aber auch komplizierteren Bewegungsformen eingegliedert, die sich nicht durch elementare Funktionen darstellen lassen, um so einen Überblick über die gesamten Bewegungsformen zu erhalten. Naturgemäß entbehrt eine solche Darstellung der Vollständigkeit, da ja nur einige wenige spezielle Fälle eingehend dargestellt werden können.

Hier liefern nun die elliptischen Funktionen ein Mittel, um die Bewegung des Kreisels, zumindest des schweren symmetrischen, erschöpfend darzustellen, indem sie gestatten, die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Kreisels als Funktionen der Zeit hinzuschreiben. Die oben angedeuteten Spezialfälle der Kreiselbewegung, worunter reguläre und pseudoreguläre Präzession, Schwingungen um die aufrechte Lage etc. zu verstehen sind, müssen natürlich als spezielle Fälle auch in den allgemeinen Gleichungen der Kreiselbewegung enthalten sein. Dies nachzuweisen ist der Zweck vorliegender Arbeit.

Die notwendigen Grundlagen sind dem Werk von Klein und Sommerfeld, „Theorie des Kreisels“, erschienen im Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1897—1910, entnommen. Die gewählten Bezeichnungen stimmen mit den in diesem Werk gebrauchten überein.

An sonstiger Literatur wurde gelegentlich noch Burkhardt, „Elliptische Funktionen“, Leipzig, Veit & Co., 1906, zu Rate gezogen.

Einleitung.

Um die Bewegung des Kreisels zu charakterisieren, benützt man in erster Linie die Kreiselspitze; darunter versteht man den Punkt in der Entfernung 1 vom Unterstützungspunkt auf der Symmetrieachse. Die Kurve, auf welcher sich die Kreiselspitze bewegt, liegt demnach vollständig auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt im Unterstützungspunkt des Kreisels sich befindet. Projiziert man die Punkte der Kurve vom Nordpol der Einheitskugel — auf welcher die Kurve verläuft — auf die Äquatorebene, so erhält man die stereographische Projektion derselben. Der Nordpol ist der Punkt der Kugeloberfläche, der senkrecht über dem Mittelpunkt liegt. — Diese stereographische Projektion nun vermag ein genaues Bild der Bewegung der Kreiselspitze zu geben.

Die Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels läßt sich leicht aus der des Kugelkreisels herleiten (s. Klein und Sommerfeld, p. 433 u. f.). Es ist also nur erforderlich, die Bewegung des Kugelkreisels zu untersuchen.

Die Darstellung der Bewegung der Kreiselspitze durch elliptische Funktionen geht aus von den Drehungsparametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (a. a. O., p. 21), die Funktionen der Eulerschen Winkel sind:

$$\text{I.} \qquad \begin{cases} \alpha = \cos\dfrac{\vartheta}{2} \cdot e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \\ \gamma = i \cdot \sin\dfrac{\vartheta}{2} \cdot e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{cases}.$$

Die Bahnkurve in stereographischer Projektion ist dann einfach dargestellt durch die Gleichung:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Setzt man hierin $\lambda = u = iv$, so sind u und v die rechtwinkligen Koordinaten des stereographischen Bildpunktes der Kreiselspitze.

Bei der Integration der Differentialgleichungen des schweren Kugelkreisels erhält man folgende 3 Gleichungen:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$$

$$\psi = \int \frac{n - Nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}$$

$$\varphi = \int \frac{N - nu}{A(1-u^2)} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

U ist eine Funktion 3. Grades der Variabeln $u = \cos\vartheta$

$$U = \frac{1}{A^2}[2APu^3 - ku^2 + 2(nN - AP)u + (k - N^2 - n^2)].$$

Oder wenn man statt der wenig anschaulichen Konstanten k die Konstante $e = \cos\vartheta_0$ — unter ϑ_0 die Anfangsneigung der Figurenachse gegen die Vertikale verstanden — einführt, so wird:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} U = \dfrac{u - e}{A^2(1-e^2)} \cdot U_1 \\ U_1 = -(u+e)(n^2+N^2) + 2Nn(1+eu) - 2AP(1-e^2)(1-u^2). \end{cases}$$

Wir wollen noch einmal hier zusammenfassen, was unter den Konstanten A, P, N, n, e zu verstehen ist.

A ist das Trägheitsmoment des Kugelkreisels, P das Moment der Schwerkraft, das in dieser Abhandlung als positiv angenommen werden soll, d. h. der Schwerpunkt des Kreisels soll über dem Unterstützungspunkt liegen. N ist die Impulskomponente in Richtung der Figurenachse; n ist die Impulskomponente in Richtung der Vertikalen; $e = \cos\vartheta_0$, wo ϑ_0 die Anfangsneigung der Figurenachse gegen die Vertikale bedeutet.

Die 5 Größen A, P, N, n, e wollen wir als die elementaren Konstanten des Kugelkreisels bezeichnen.

Da U eine Funktion 3. Grades in u ist, so ist bei den

obengenannten 3 Integralen eine einfache Quadratur im allgemeinen Fall nicht möglich. Außerdem haben diese Integrale noch den Nachteil, daß die Koordinaten der Kreiselspitze nicht explizit dadurch bestimmt sind.

Bei der Behandlung der Kreiselbewegung mittels elliptischer Funktionen kehrt man den Zusammenhang der Variabeln u und t um, d. h. man drückt die Koordinaten der Kreiselspitze durch die Zeit t aus; es handelt sich dabei um die Umkehrung des elliptischen Integrals 1. Gattung:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Um nun den Zusammenhang zwischen $(u, \sqrt{U})$ einerseits und t andererseits genauer zu studieren, trägt man sich die Wertepaare $(u, \sqrt{U})$ auf einer Riemannschen Fläche auf. Diese Fläche muß 2 blättrig sein, da zu jedem Wert u 2 Werte $\sqrt{U}$ gehören, die sich durch das Vorzeichen unterscheiden. Diese Riemannsche Fläche hat 4 Verzweigungspunkte, d. h. Punkte, in denen die beiden Blätter zusammenhängen, das sind:

1. die Werte von u, für die $U = 0$ wird, und

2. der Wert von u, für den $U = \infty$ wird, da ja die Funktionentheorie einen Unterschied zwischen $+\infty$ und $-\infty$ nicht kennt.

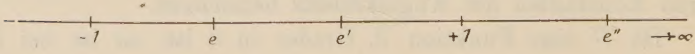
Die Wurzeln der Gleichung $U = 0$ sind einmal $u = e$ und dann noch die beiden Wurzelwerte der Gleichung $U_1 = 0$, nämlich e' und e''. Außerdem ist $U = \infty$ für $u = \infty$.

Die 4 Verzweigungspunkte liegen alle auf der reellen Achse und bezüglich ihrer gegenseitigen Lage besteht noch unter der Voraussetzung $P > 0$ die Ungleichung:

III. $\quad -1 < e < e' < +1 < e'' < \infty$ (a. a. O., p. 261).

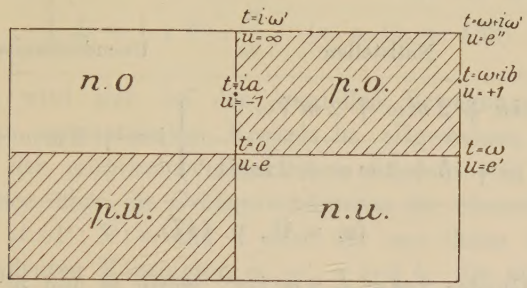
Die Lage der Verzweigungspunkte auf der reellen Achse veranschaulicht Fig. 1.

Fig. 1.



Will man nun den Zusammenhang zwischen u und t umkehren, so hat man die Riemannsche Fläche $(u, \sqrt{U})$ auf die t-Ebene abzubilden. Zerschneidet man die Riemannsche Fläche nach der reellen Achse, so zerfällt sie in 4 Halbebenen, die sich in der t-Ebene in wohlbekannter Weise abbilden (Fig. 2).

Fig. 2.



Jede Halbebene bildet sich auf ein Rechteck ab, dessen Ecken die Bildpunkte der 4 Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche $(u, \sqrt{U})$ sind.

Die Figur bestimmt auch die im folgenden zu benützenden Größen a, b. Es sollen nämlich die Punkte $t = \omega + ib$ und $t = ia$ den beiden Werten der Variabeln $u = +1$ und $u = -1$ entsprechen.

Die Größen 2ω bzw. $2i\omega'$ sind die Perioden des elliptischen Integrals $t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$. Es ist:

$$\omega = \int_{e}^{e'} \frac{du}{\sqrt{U}} \quad \text{und} \quad i\omega' = \int_{e}^{-\infty} \frac{du}{\sqrt{U}};$$

ferner ist:

$$ia = \int_{-1}^{e} \frac{du}{\sqrt{U}} \quad \text{und} \quad ib = \int_{e}^{+1} \frac{du}{\sqrt{U}},$$

wie ja auch direkt aus dem Periodenrechteck abzulesen ist (a. a. O., p. 263). Näheres über die Abbildung siehe daselbst p. 406 ff.

Um nun α und γ durch elliptische Funktionen ausdrücken zu können, ist es erforderlich, ihre Null- bzw. Unendlichkeitsstellen zu kennen. Dieselben sind aus folgender Zusammenstellung zu ersehen:

	Nullstellen	Unendlichkeitsstellen
α	$+ ia + 2m\omega + 2m'i\omega'$	$i\omega' + 2m\omega + 2m'i\omega'$
γ	$- \omega + ib + 2m\omega + 2m'i\omega'$	

(a. a. O., p. 147).

Die Glieder $2m\omega + 2m'i\omega'$, worin m und m' beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind, müssen deshalb angefügt werden, weil sich die Riemannsche Fläche in ein System von unendlich vielen Periodenrechtecken in der t-Ebene abbildet.

Zur Darstellung der Drehungsparameter α und γ benützen wir die ϑ-Funktionen, und es ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= k_1 e^{lt} \frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t - i\omega')} \\ \gamma &= k_3 \cdot e^{l't} \frac{\vartheta(t + \omega - ib)}{\vartheta(t + i\omega')} \end{aligned}\right\} \quad \text{(a. a. O., p. 420)}$$

IV.
$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= K \cdot e^{iLt} \frac{\vartheta(t - ia)}{\vartheta(t + \omega - ib)} \\ K &= \frac{k_1}{k_3} = \frac{\vartheta(\omega - i\omega' + ib)}{\vartheta(ia - i\omega')} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega + ib - ia)} \\ L &= l + l' - \frac{\pi}{\omega} \end{aligned}\right. \quad \text{(a. a. O., p. 431).}$$

Wählt man als Projektionszentrum aber nicht den Nordpol, sondern den Südpol der Einheitskugel, was für die Ab-

bildung insofern günstiger ist, als die Figuren dann nicht so verzerrt erscheinen, so ergibt sich:

IV'.
$$\begin{cases} \lambda = K \cdot e^{iLt} \dfrac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)} \\ K = \dfrac{\vartheta(i\omega'-ia)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega-ib+ia)} \\ L = l+l'-\dfrac{\pi}{\omega} \quad \text{(a. a. O., p. 433).} \end{cases}$$

Es wird sich bei den speziellen Bewegungsformen des schweren symmetrischen Kreisels im allgemeinen um Ausartungen der elliptischen Funktionen handeln, bei besonderen Annahmen über die Größenverhältnisse der elementaren Konstanten $A:P:N:n$ und e oder der aus ihnen abgeleiteten transzendenten Konstanten ω, ω', a und b. Da aber aus dem Bisherigen zu ersehen ist, daß die elliptischen Funktionen wesentlich abhängen von der Form der Periodenrechtecke oder von der Lage der Verzweigungspunkte in der Riemannschen Fläche, so tritt, wie allgemein bekannt, eine solche Ausartung ein, wenn zwei (oder mehrere) von den Verzweigungspunkten zusammenrücken und damit als Verzweigungspunkte in Wegfall kommen. Es wird damit mindestens eine Periode der Integrale der Riemannschen Fläche zu Null oder ∞ und die Integrale selbst reduzieren sich damit auf einfach periodische, also logarithmische oder zyklometrische Funktionen. Die Periodenrechtecke gehen gleichzeitig in Streifen über und an die Stelle der elliptischen Funktionen treten damit Exponential- oder trigonometrische Funktionen.

Mit Bezug auf die gegenseitige Lage der 4 Verzweigungspunkte muß für $P > 0$ immer die Ungleichung bestehen:

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < \infty \quad \text{(Gl. III).}$$

Nur kann natürlich an die Stelle des Zeichens $<$ das Zeichen $=$ treten, was gerade die Ausartungen zur Folge hat.

Es gibt daher für das Zusammenrücken der 4 Verzweigungspunkte folgende 5 Möglichkeiten:

1) $e = e'$

2) $e' = e'' = 1$

3) $e'' = \infty$.

Mit diesen 3 Fällen sind die Möglichkeiten des einfachen Zusammenrückens zweier Verzweigungspunkte erschöpft.

Außerdem kann ein Zusammenrücken der Verzweigungspunkte auch noch stattfinden in folgender Weise:

4) $e = e' = e'' = 1$

5) $e = e',\ e'' = \infty$.

Es wird nun unsere Aufgabe sein, die Ausartung der elliptischen Funktionen in diesen 5 Fällen zu untersuchen; die dabei zu verwendenden Formeln seien hier zusammengestellt:

V.
$$\begin{cases} \omega = M \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \\ \omega' = M \cdot F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

VI.
$$\begin{cases} k = \sqrt{\frac{e' - e}{e'' - e}} \\ k' = \sqrt{1 - k^2} \end{cases}$$

VII.
$$\begin{cases} a = M \cdot F(k', \varphi_a) \qquad \varphi_a = \arcsin \sqrt{\frac{1+e}{1+e'}} \\ b = M \cdot F(k', \varphi_b) \qquad \varphi_b = \arcsin \sqrt{\frac{e'' - e}{e'' - e'} \cdot \frac{1 - e'}{1 - e}} \end{cases}$$

Vgl. a. a. O., p. 264.

IX. $$M = \sqrt{\frac{2A}{P(e'' - e)}}$$

X. $$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Für die ϑ-Funktion benützen wir die Reihenentwicklung:

XI. $$\vartheta(t) = q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin s - q^{\frac{9}{4}} \cdot \sin 3s + - \cdots,$$

wo

XII. $$q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\cdot\pi}$$

und

XIII. $$s = \frac{t\pi}{2\omega}$$

ist (a. a. O., p. 418).

Die Bahnkurve ist bei stereographischer Projektion vom Südpol bestimmt durch die Gleichungen IV'.

Dabei bedarf es noch einer Angabe über die Bestimmung von l und l'. Es ist:

XIV. $$\begin{cases} l = i\cdot\dfrac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} & \text{und} \\ l' = i\cdot\dfrac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta(i\omega' - \omega + ib)} & \text{(a. a. O., p. 428, Gl. 18).} \end{cases}$$

Auf Grund der Gleichungen IV' und XIV wollen wir nun in jedem der angeführten 5 speziellen Fälle die Bahngleichung näher untersuchen.

§ 1. Reguläre Präzession.

I. Fall: $e = e'$. Unsere Formeln VI ergeben $k = 0$, daher $k' = 1$. Die Berechnung des Legendreschen Integrals 1. Gattung (X) ergibt:

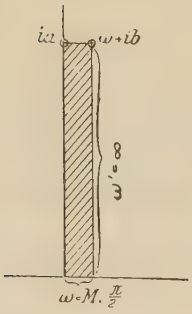
1) $$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \qquad F\left(k', \frac{\pi}{2}\right) = \infty .$$

Da $M = \sqrt{\dfrac{2A}{P(e'' - e)}}$ eine endliche Zahl darstellt, ist nach V:

2) $$\omega = M\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\omega' = M\cdot\infty = \infty .$$

Das Periodenrechteck artet also in einen Streifen aus von der Breite $M\cdot\dfrac{\pi}{2}$, der sich parallel der imaginären Achse bis ins Unendliche erstreckt (Fig. 3).

Fig. 3.



Außerdem wird noch zufolge VIII: $\varphi_a = \varphi_b = \frac{\pi}{2}$. Nach VII und X ergeben also die Integrale für a und b unendlich große Werte. Es ist jedoch zu beachten, daß die Differenzen $\omega' - a$ und $\omega' - b$, welche zunächst in der unbestimmten Form $\infty - \infty$ erscheinen, bei dem Grenzübergang $\lim e' = e$ endliche und von Null verschiedene Werte annehmen. Es ist z. B.:

$$3) \qquad \omega' - a = M \int_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

und daher, wenn der Nenner das eine Mal vergrößert, das andere Mal verkleinert wird:

$$4) \qquad \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_a}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi_a}} < \frac{\omega' - a}{M} < \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_a}{\sqrt{1 - k'^2}}.$$

Die angegebene obere und untere Grenze nähert sich aber für $e' = e$ je einem endlichen Werte, somit muß auch $\omega' - a$ selbst eine endliche Größe sein.

Der Grenzübergang $\lim e' = e$ läßt sich für obige Ungleichung direkt in folgender Weise durchführen:

Da $\varphi_a = \arcsin \sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}$, so ist $\sin \varphi_a = \sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}$, man erhält daher:

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_a}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi_a}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}}{\sqrt{1 - \frac{e'' - e'}{e'' - e} \cdot \frac{1+e}{1+e'}}};$$

wenn man nun noch $e' = e + \varepsilon$ setzt, so wird:

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}}{\sqrt{1 - \frac{e''-e'}{e''-e}\cdot\frac{1+e}{1+e'}}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{1+e}}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{e''-e}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{1+e}\right)}}.$$

Differenziert man Zähler und Nenner nach ε und setzt in dem erhaltenen Ausdruck $\varepsilon = 0$, d, h. $e' = e$, so erhält man:

5) $$\lim_{e'=e} \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_a}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi_a}} = \sqrt{\frac{e''-e}{1+e''}}.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung 4) zurückführen auf $\sqrt{\frac{e''-e}{1+e}}$. Beide Wurzeln sind positive endliche Größen und da von M dasselbe gilt, so muß auch $\omega' - a$ eine positive endliche Größe sein.

Für $\omega' - b$ läßt sich natürlich eine ähnliche Ungleichung aufstellen, nämlich:

6) $$\frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_b}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi_b}} < \frac{\omega' - b}{M} < \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi_b}{\sqrt{1 - k'^2}}$$

und man findet auf dieselbe Weise wie vorhin als obere bzw. untere Grenze für $\omega' - b$:

7) $$\sqrt{\frac{e''-1}{e''-e}} < \frac{\omega' - b}{M} < \sqrt{\frac{e''-1}{1-e}}.$$

Auch diese beiden Werte sind endlich und positiv, somit muß auch $\omega' - b$ ein endlicher positiver Wert sein.

Wir setzen nun vorläufig $\omega' - a = \alpha$ und $\omega' - b = \beta$ und gehen damit zur Bestimmung der Konstanten K und L über. Wir haben:

IV′. $$K = \frac{\vartheta(i\omega' - ia)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega - ib + ia)}.$$

Führen wir hierin α und β ein, so erhalten wir:

$$K = \frac{\vartheta(i\alpha)}{\vartheta(\omega + i\beta)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega - i(\alpha-\beta))}$$

$$= -i\frac{\vartheta(i\alpha)}{\vartheta(\omega + i\beta)} \cdot e^{\frac{\beta-\alpha}{2\omega}\pi}.$$

Setzen wir nun an Stelle der ϑ-Funktionen die entsprechenden Reihenentwicklungen, so wird:

$$\vartheta(i\alpha) = q^{\frac{1}{4}}\left(\sin\frac{i\alpha\pi}{2\omega} - q^2 \cdot \sin\frac{3\,i\alpha\pi}{2\omega} + - \cdots\right)$$

$$\vartheta(\omega + i\beta) = q^{\frac{1}{4}}\left(\sin\frac{\omega + i\beta}{2\omega}\pi - q^2 \cdot \sin\frac{3(\omega + i\beta)}{2\omega}\pi + - \cdots\right).$$

In jeder dieser beiden Klammern verschwinden alle Glieder bis auf das erste. Es ist nämlich:

XII. $$q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi}$$

und da nach 1)

$$\omega' = \infty$$

und nach V und 1)

$$\omega = M \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = M \cdot \frac{\pi}{2},$$

so wird

8) $$q = 0.$$

Dadurch erhalten wir schließlich:

$$K = -i\frac{\sin\frac{i\alpha\pi}{2\omega}}{\sin\frac{\omega + i\beta}{2\omega}\pi} \cdot e^{\frac{\beta-\alpha}{2\omega}\pi}$$

und wenn wir jetzt statt der trigonometrischen Exponentialfunktionen einführen, so wird:

$$K = -\frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}} - e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}}{e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}} - e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}}} \cdot e^{\frac{\beta-\alpha}{2\omega}\pi}$$

oder

9) $$K = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}}{1 + e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}}.$$

Zur Bestimmung von L benützen wir die Gleichung IV' und XIV, wonach:

$$L = l + l' - \frac{\pi}{\omega}$$

$$l = i\,\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta\,(i\omega' - ia)}$$

und

$$l' = i\,\frac{\vartheta'(i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta\,(i\omega' - \omega + ib)}.$$

Daraus ergibt sich unter Weglassung der Glieder höherer Ordnung der ϑ-Reihen:

$$l = i\,\frac{\frac{\pi}{2\omega}\cos\frac{ia\pi}{2\omega}}{\sin\frac{ia\pi}{2\omega}} = \frac{i\pi}{2\omega}\cdot\operatorname{ctg}\frac{ia\pi}{2\omega}.$$

l' läßt sich noch etwas umformen, indem man auf Grund der Funktionalgleichung 5) a. a. O., p. 419 schreibt:

$$l' = i\left(\frac{\vartheta'(-i\omega' - \omega + ib)}{\vartheta\,(-i\omega' - \omega + ib)} - i\,\frac{\pi}{\omega}\right)$$

$$= -i\,\frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta\,(\omega + i\omega' - ib)} + \frac{\pi}{\omega}.$$

Somit ist:

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = -i\,\frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta\,(\omega + i\omega' - ib)}.$$

Durch Entwicklung in ϑ-Reihen unter Weglassung der Glieder höherer Ordnung erhält man:

$$l' - \frac{\pi}{\omega} = -i\,\frac{\frac{\pi}{2\omega}\cos\frac{\omega + i\beta}{2\omega}\pi}{\sin\frac{\omega + i\beta}{2\omega}\pi} = \frac{i\pi}{2\omega}\cdot\operatorname{tg}\frac{i\beta\pi}{2\omega}.$$

Damit ist L durch α und β bestimmt.

10) $$L = \frac{i\pi}{2\omega} \cdot \operatorname{ctg} \frac{i\alpha\pi}{2\omega} + \frac{i\pi}{2\omega} \cdot \operatorname{tg} \frac{i\beta\pi}{2\omega}.$$

Führen wir statt der trigonometrischen die Exponentialfunktion ein, so wird:

$$L = \frac{i\pi}{2\omega} \cdot i \frac{e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}} + e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}}{e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}} - e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}} - \frac{i\pi}{2\omega} \cdot i \frac{e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}} - e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}}}{e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}} + e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}}}$$

$$= \frac{\pi}{2\omega} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}} - \frac{\pi}{2\omega} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}}{1 + e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}}.$$

Wir wollen nun gleich noch den Quotienten $\frac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)}$ durch die entsprechenden Reihenentwicklungen ersetzen. Auch hierbei können sowohl im Zähler als im Nenner wegen 7) $q = 0$ alle Glieder bis auf das erste fortgelassen werden, so daß sich ergibt:

$$\frac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)} = \frac{\sin\frac{t+\omega+ib}{2\omega}\pi}{\sin\frac{t+ia}{2\omega}\pi} = \frac{\cos\frac{t+ib}{2\omega}\pi}{\sin\frac{t+ia}{2\omega}\pi}.$$

Nun ist:

$$\cos\frac{t+ib}{2\omega}\pi = \frac{e^{\frac{it\pi}{2\omega} - \frac{b\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{it\pi}{2\omega} + \frac{b\pi}{2\omega}}}{2}.$$

Da aber zufolge Gleichung VII und 1)

$$b = \infty,$$

so verschwindet das erste Glied im Zähler und es bleibt:

$$\cos\frac{t+ib}{2\omega}\pi = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{it\pi}{2\omega} + \frac{b\pi}{2\omega}}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\sin\frac{t+ia}{2\omega}\pi = \frac{i}{2} \cdot e^{-\frac{it\pi}{2\omega} + \frac{a\pi}{2\omega}}.$$

Es wird somit:

$$11) \qquad \frac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)} = -i\cdot e^{\frac{b-a}{2\omega}\pi} = -i\cdot e^{-\frac{\beta-\alpha}{2\omega}\pi}.$$

Aus IV′, 9), 10), 11) können wir nun unsere Bahngleichung ansetzen. Es wird:

$$\lambda = -i\frac{1-e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}}{1+e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}}\cdot e^{iLt}\cdot e^{-\frac{\beta-\alpha}{2\omega}\pi}$$

$$= -i\frac{e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}}}{e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}}}\cdot(\cos Lt+i\cdot\sin Lt).$$

Führt man jetzt noch $\lambda = u+iv$ ein, so erhält man offenbar:

$$12) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}}}{e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}}}\cdot\sin Lt \\ v = -\dfrac{e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}}}{e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}}}\cdot\cos Lt. \end{cases}$$

Dieses ist aber die Gleichung eines Kreises, der seinen Mittelpunkt im Ursprung hat und dessen Radius

$$13) \qquad r = \frac{e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}}-e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}}}{e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}}+e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}}}$$

ist. Die Kreiselspitze bewegt sich also auf einem Kreis um die Vertikale und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit L. Eine solche Bewegung eines Kreisels nennt man aber reguläre Präzession.

Damit wäre eigentlich der Fall I erledigt. Es wird jedoch von Interesse sein, genauer zu wissen, welche Werte r und L ausgedrückt in den elementaren Konstanten des Kreisels haben.

Zu diesem Zweck brauchen wir die genaue Bestimmung von α und β, d. h. von $\omega' - a$ und $\omega' - b$. Es war:

V. $$\omega' = M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

VII. $$\begin{cases} a = M \int_0^{\varphi_a} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \\ b = M \int_0^{\varphi_b} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}. \end{cases}$$

Daraus folgt aber:

14) $$\frac{\omega' - a}{M} = \int_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

15) $$\frac{\omega' - b}{M} = \int_{\varphi_b}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Diese Integrale wollen wir nun direkt auswerten. Es ist:

$$k' = \sqrt{\frac{e'' - e'}{e'' - e}},$$

daher, wenn wir wieder

$$e' = e + \varepsilon$$

setzen:

$$k'^2 = 1 - \frac{\varepsilon}{e'' - e}.$$

Setzen wir ferner:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \eta$$

und

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_a = \eta_a,$$

so folgt:

$$\sin \varphi_a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \eta_a\right) = \cos \eta_a.$$

Für $\cos \eta_a$ kann man aber, da η_a sehr klein ist, schreiben:

$$\cos \eta_a = 1 - \frac{\eta_a^2}{2}.$$

Nun ist aber nach Gleichung VIII:

$$\varphi_a = \arcsin \sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}$$

oder

$$\sin^2 \varphi_a = \frac{1+e}{1+e'} = 1 - \frac{\varepsilon}{1+e}.$$

Außerdem $\sin^2 \varphi_a = \cos^2 \eta_a = 1 - \eta_a^2$ unter Weglassung des Gliedes 4. Grades in η_a. Daraus folgt:

$$\eta_a = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+e}}.$$

Setzen wir die erhaltenen Größen in unsere Integrale ein, so wird

$$\frac{\omega' - a}{M} = \int_0^{\eta_a} \frac{d\eta}{\sqrt{1-(1-k^2)(1-\eta^2)}} = \int_0^{\eta_a} \frac{d\eta}{\sqrt{k^2+\eta^2}}$$

wieder unter Weglassung der Glieder höheren Grades.

Es folgt:

$$\frac{\omega' - a}{M} = \log\left(\eta + \sqrt{k^2+\eta^2}\right)_0^{\eta_a}.$$

Die oben gefundenen Werte hier eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\omega' - a}{M} = \log\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+e}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+e} + \frac{\varepsilon}{e''-e}}\right) - \log \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{e''-e}}$$

oder

16) $$\frac{\omega' - a}{M} = \log \frac{\sqrt{e'' - e} + \sqrt{1 + e''}}{\sqrt{1 + e}}.$$

Setzt man nun ebenso zur Bestimmung von $\omega' - b$:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \eta,$$

so daß

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_b = \eta_b$$

wird, dann ist

$$\sin^2 \varphi_b = 1 - \eta_b^2,$$

aber aus

VIII. $$\varphi_b = \arcsin \sqrt{\frac{e'' - e}{e'' - e'} \cdot \frac{1 - e'}{1 - e}}$$

folgt auch

$$\sin^2 \varphi_b = \frac{e'' - e}{e'' - e'} \cdot \frac{1 - e'}{1 - e}$$

$$= \left(1 + \frac{\varepsilon}{e'' - e}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{1 - e}\right)$$

$$= 1 - \frac{e'' - 1}{(e'' - e)(1 - e)} \cdot \varepsilon.$$

Das Glied mit ε^2 ist fortgelassen. Somit ist:

$$\eta_b = \sqrt{\frac{e'' - 1}{(e'' - e)(1 - e)}} \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Man erhält so:

$$\frac{\omega' - b}{M} = \log (\eta_b + \sqrt{k^2 + \eta_b^2})_0^{\eta_b}$$

$$= \log\left(\sqrt{\frac{(e'' - 1)\varepsilon}{(e'' - e)(1 - e)}} + \sqrt{\frac{(e'' - 1)\varepsilon}{(e'' - e)(1 - e)} + \frac{\varepsilon}{e'' - e}}\right) - \log \sqrt{\frac{\varepsilon}{e'' - e}}$$

oder

17) $$\frac{\omega' - b}{M} = \log \frac{\sqrt{e'' - 1} + \sqrt{e'' - e}}{\sqrt{1 - e}}.$$

Nun ist aber

2) $$\omega = M \cdot \frac{\pi}{2},$$

daher

$$\frac{a\pi}{2\omega} = \frac{\omega' - a}{M}$$

und

$$\frac{\beta\pi}{2\omega} = \frac{\omega' - b}{M};$$

daraus folgt nach Gleichung 16):

$$\frac{a\pi}{2\omega} = \log \frac{\sqrt{e'' - e} + \sqrt{1+e''}}{\sqrt{1+e}},$$

somit

$$e^{\frac{a\pi}{2\omega}} = \frac{\sqrt{e'' - e} + \sqrt{1+e''}}{\sqrt{1+e}}$$

$$e^{-\frac{a\pi}{2\omega}} = \frac{-\sqrt{e'' - e} + \sqrt{1+e''}}{\sqrt{1+e}},$$

daher

$$e^{\frac{a\pi}{2\omega}} - e^{-\frac{a\pi}{2\omega}} = 2\sqrt{\frac{e'' - e}{1+e}}.$$

Ganz ebenso findet man nach Gleichung 17):

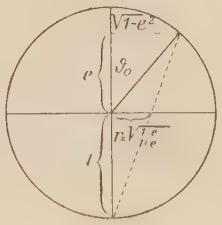
$$e^{\frac{\beta\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{\beta\pi}{2\omega}} = 2\sqrt{\frac{e'' - e}{1-e}}.$$

Durch Benützung dieser beiden Werte geht Gleichung 13) über in

18) $$r = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

Dieses Resultat ist geometrisch evident. Läßt man nämlich einen Radius der Einheitskugel mit der Neigung ϑ_0 gegen die Vertikale, wo $\cos\vartheta_0 = e$, sich um diese drehen, so beschreibt die stereographische Projektion des Endpunktes, vom Südpol aus gesehen, einen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$.

Fig. 4.



Es ist nämlich:

$$r : \sqrt{1-e^2} = 1 : (1+e),$$

woraus

$$r = \sqrt{\frac{1-e^2}{(1+e)^2}} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

Wir wollen nun auch noch die Präzessionsgeschwindigkeit L genau bestimmen. Wir hatten gefunden:

$$L = \frac{\pi}{2\omega}\frac{1+e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}}{1-e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}} - \frac{\pi}{2\omega}\frac{1-e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}}{1+e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}}.$$

Es war (siehe p. 21):

$$e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}} - e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}} = 2\sqrt{\frac{e''-e}{1-e}}.$$

Entsprechend ist:

$$e^{\frac{\alpha\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{\alpha\pi}{2\omega}} = 2\sqrt{\frac{1+e''}{1-e}}.$$

Daher durch Division:

$$\frac{1+e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}}{1-e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega}}} = \sqrt{\frac{e''+1}{e''-e}}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung ergibt sich:

$$\frac{1-e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}}{1+e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}}} = \sqrt{\frac{e''-1}{e''-e}},$$

so daß man schließlich hat:

$$L = \frac{\pi}{2\omega}\left(\sqrt{\frac{e''+1}{e''-e}} - \sqrt{\frac{e''-1}{e''-e}}\right).$$

Nun ist aber nach Gleichung 2):

$$\omega = \frac{M\cdot\pi}{2} = \sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\cdot\frac{\pi}{2};$$

somit ist:

$$L = \sqrt{\frac{P}{2A}}\,(\sqrt{e''+1} - \sqrt{e''-1}).$$

Die Gleichung zur Bestimmung von e, e' und e'' lautete:

$$U = \frac{u-e}{A^2(1-e^2)} \cdot U_1$$

$$U_1 = -(u+e)(n^2+N^2) + 2Nn(1+eu) - 2AP(1-e^2)(1-u^2).$$

Aus der ersten Gleichung findet man die Wurzel $u = e$. Die zweite dient zur Bestimmung von e' und e''. Ordnet man sie nach Potenzen von u, so findet man

$$e'' + e' = \frac{N^2 + n^2 - 2Nne}{2AP(1-e^2)}$$

als Koeffizient von u.

In unserem speziellen Fall soll aber $e' = e$ sein, somit:

$$e'' = \frac{N^2 + n^2 - 2Nne}{2AP(1-e^2)} - e.$$

In diesem Fall muß aber auch die Gleichung $U_1 = 0$ durch den Faktor $u - e$ teilbar sein. Daraus ergibt sich folgende Beziehung zwischen den Konstanten:

$$AP = \frac{N - ne}{1-e^2} \cdot \frac{n - Ne}{1-e^2},$$

wie man sich leicht überzeugt.

Benützt man diese eben gefundenen Beziehungen, so läßt sich L in folgender Weise umformen:

$$19) \quad L = \frac{(N+n)(1-e)}{2A(1-e^2)} - \frac{(N-n)(1+e)}{2A(1-e^2)} = \frac{n - Ne}{A(1-e^2)}.$$

Das ist aber genau derselbe Wert, wie er in Klein und Sommerfeld, p. 280, Gleichung 4) angegeben ist.

Dem Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte e und e' entspricht also auch hinsichtlich der Konstantendarstellung die reguläre Präzession des Kreisels.

§ 2. Die spiralige Bewegung des aufrechten schwachen Kreisels.

II. Fall: $e' = e'' = 1$. Wir wollen zunächst untersuchen, welche Werte in diesem Fall unsere Konstanten annehmen. Es wird:

1) $$\begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{e' - e}{e'' - e}} = 1 \\ k' = \sqrt{1 - k^2} = 0 \end{cases}$$

2) $$M = \sqrt{\frac{2A}{P(1-e)}}$$

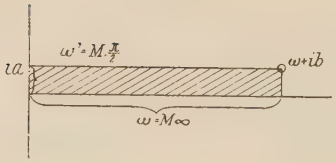
3) $$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)_0^{\varphi}$$

4) $$\begin{cases} \varphi_a = \arcsin \sqrt{\dfrac{1+e}{1+e'}} = \arcsin \sqrt{\dfrac{1+e}{2}} \\ \varphi_b = \arcsin \sqrt{\dfrac{e'' - e}{e'' - e'} \cdot \dfrac{1 - e'}{1 - e}} = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \omega' = M \cdot F\left(k', \dfrac{\pi}{2}\right) = M \cdot \dfrac{\pi}{2} \\ \omega = M \cdot F\left(k, \dfrac{\pi}{2}\right) = M \cdot \infty \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} a = M \cdot F(k', \varphi_a) = M \varphi_a = M \arcsin \sqrt{\dfrac{1+e}{2}} \\ b = M \cdot F(k', \varphi_b) = M \cdot \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Fig. 5.



Während das Periodenrechteck im 1. Fall in einen unendlich langen Streifen ausartete, der zur imaginären Achse parallel war, wird es diesmal zu einem unendlich langen Streifen von der Breite $M \cdot \frac{\pi}{2}$ parallel zur reellen Achse (Fig. 5).

Die Reihenentwicklung für die ϑ-Funktionen, die wir im 1. Fall angewendet haben, wird diesmal unbrauchbar, weil ihre Konvergenz von der Größe $q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi}$ abhängt, die diesmal $= 1$ wird. Wir formen daher die ϑ-Funktionen um (nach Gleichung 3), p. 442 a. a. O.):

$$\vartheta(t, \omega, \omega') = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot e^{-\frac{\pi t^2}{4\omega\omega'}} \cdot \vartheta(it, \omega', \omega).$$

Dadurch vertauschen sich also die beiden Perioden und der Koeffizient der ϑ-Reihe geht über in $q' = e^{-\frac{\omega}{\omega'}\cdot\pi}$, ein Wert, der in der Grenze $e' = e'' = 1$ wiederum zu Null wird.

Wir gehen nun über zur Bestimmung der Konstanten K und L. Nach Gleichung IV' ist:

$$K = \frac{\vartheta(i\omega' - ia)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega - ib + ia)}$$

$$\vartheta(i\omega' - ia) = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot e^{-\frac{\pi(i\omega' - ia)^2}{4\omega\omega'}} \cdot \vartheta(i(i\omega' - ia))$$

$$= -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot e^{\frac{\pi(\omega' - a)^2}{4\omega\omega'}} \cdot q'^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\frac{a - \omega'}{2\omega'}\pi.$$

Alle weiteren Glieder der Reihenentwicklung können weggelassen werden, da

7) $\quad q' = e^{-\frac{\omega}{\omega'}\pi} = 0$ wegen $\omega = \infty$ (Gleichung 5).

Aus demselben Grunde ist auch:

$$e^{\frac{\pi(\omega' - a)^2}{4\omega\omega'}} = 1.$$

Somit:

$$\vartheta(i\omega' - ia) = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot q'^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\frac{a - \omega'}{2\omega'}\pi = +i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} q'^{\frac{1}{4}} \cdot \cos\frac{a\pi}{2\omega'}.$$

Ebenso wird:

$$\vartheta(\omega+i\omega'-ib) = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\cdot e^{-\frac{\pi(\omega+i\omega'-ib)^2}{4\omega\omega'}}\cdot\vartheta(i(\omega+i\omega'-ib))$$

$$= -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\cdot e^{-\frac{\pi\omega}{4\omega'}-\frac{\pi i(\omega'-b)}{2\omega'}+\frac{\pi(\omega'-b)^2}{4\omega\omega'}}\cdot q'^{\frac{1}{4}}\cdot\sin\frac{i(\omega+i\omega'-ib)}{2\omega'}\pi.$$

Da ferner für $\omega = \infty$

$$\sin\frac{i(\omega+i\omega'-ib)}{2\omega'}\pi = \frac{i}{2}\cdot e^{\frac{\omega+i\omega'-ib}{2\omega}\pi}$$

wird, so kann man schreiben:

$$\vartheta(\omega+i\omega'-ib) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\cdot q'^{\frac{1}{4}}\cdot e^{+\frac{\pi\omega}{4\omega'}},$$

also:

$$\frac{\vartheta(i\omega'-ia)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)} = 2i\cdot e^{-\frac{\pi\omega}{2\omega'}}\cos\frac{a\pi}{2\omega'}.$$

Dies ist zugleich der Wert von K bis auf den Faktor

$$e^{-\frac{i\pi}{2\omega}(\omega+ia-ib)} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

Also wird einfach:

8) $$K = 2e^{-\frac{\pi\omega}{4\omega'}}\cdot\cos\frac{a\pi}{2\omega'}.$$

Zur Bestimmung von L benützen wir wieder unsere Gleichungen IV' und XIV.

$$\begin{cases} L = l + l' - \dfrac{\pi}{\omega} \\ l = i\dfrac{\vartheta'(i\omega'-ia)}{\vartheta(i\omega'-ia)} \\ l' - \dfrac{\pi}{\omega} = -i\dfrac{\vartheta'(\omega+i\omega'-ib)}{\vartheta(\omega+i\omega'-ib)}. \end{cases}$$

Zur Berechnung der beiden Konstanten l und l' benützen wir die Identität

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d(\log(f(x)))}{dx}$$

$$\vartheta(i\omega'-ia) = +i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}}\cdot q'^{\frac{1}{4}}\cdot\cos\frac{a\pi}{2\omega'}.$$

Bilden wir nun den Logarithmus von $\vartheta(i\omega' - ia)$ und differenzieren wir nach a, wobei noch 5) zu beachten ist, so ergibt sich:

$$l = \frac{\pi}{2\omega'} \cdot \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2\omega'}.$$

$l' - \frac{\pi}{\omega}$ wird wegen $\omega' = b$ zu Null. Man findet also:

9) $$L = \frac{\pi}{2\omega'} \cdot \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2\omega'}.$$

Es erübrigt noch, den Quotienten

$$\frac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)}$$

der Gleichung IV' zu entwickeln. Es ist:

$$\vartheta(t + \omega + ib) = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot e^{-\frac{\pi(t+\omega+ib)^2}{4\omega\omega'}} \cdot q'^{\frac{1}{4}} \cdot \sin i\frac{(t+\omega+ib)}{2\omega'}\pi$$

$$= -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot e^{-\frac{\pi(t+ib)}{2\omega'} - \frac{\pi\omega}{4\omega'}} \cdot \sin \frac{i(t+\omega+ib)}{2\omega'}\pi$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot e^{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\omega}{\omega'}} \text{ wegen } \omega = \infty;$$

und aus demselben Grunde:

$$\vartheta(t + ia) = -i\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot q'^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \frac{i(t+ia)}{2\omega'}\pi,$$

also durch Division:

10) $$\frac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)} = -\frac{e^{\frac{\omega\pi}{4\omega'}}}{e^{-\frac{t+ia}{2\omega'}\pi} - e^{\frac{t+ia}{2\omega'}\pi}}.$$

Wenn wir jetzt die gefundenen Resultate für

$$K,\ L \text{ und } \frac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)}$$

zusammenfassen, finden wir folgende Bahngleichung:

$$\lambda = 2\,e^{-\frac{\pi\,\omega}{4\,\omega'}} \cdot \cos\frac{a\,\pi}{2\,\omega'} \cdot e^{\left(\frac{i\,\pi}{2\,\omega'} \cdot \operatorname{tg}\frac{a\,\pi}{2\,\omega'}\right) t} \cdot \frac{e^{\frac{\omega\,\pi}{4\,\omega'}}}{e^{\frac{t+i\,a}{2\,\omega'}\,\pi} - e^{-\frac{t+i\,a}{2\,\omega'}\,\pi}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{a\,\pi}{2\,\omega'} \cdot e^{\left(\frac{i\,\pi}{2\,\omega'} \cdot \operatorname{tg}\frac{a\,\pi}{2\,\omega'}\right) t}}{e^{\frac{t+i\,a}{2\,\omega'}\,\pi} - e^{-\frac{t+i\,a}{2\,\omega'}\,\pi}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

11) $$\frac{\pi}{2\,\omega'} \cdot \operatorname{tg}\frac{a\,\pi}{2\,\omega'} = \varphi$$

und

12) $$i\left(e^{\frac{t+i\,a}{2\,\omega'}\,\pi} - e^{-\frac{t+i\,a}{2\,\omega'}\,\pi}\right) = \varrho \cdot e^{-i\,\chi},$$

so wird

$$\lambda = \frac{2\,i\cos\frac{a\,\pi}{2\,\omega'}\,e^{i\,\varphi\,t}}{\varrho \cdot e^{-i\,\chi}},$$

oder

13) $$\lambda = \frac{2\,i\cos\frac{a\,\pi}{2\,\omega'}}{\varrho} \cdot (\cos(\varphi\,t + \chi +) i\sin(\varphi\,t + \chi)).$$

Dabei ist:

13a)
$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{e^{\frac{t\,\pi}{\omega'}} - 2\cos\frac{a\,\pi}{\omega'} + e^{-\frac{t\,\pi}{\omega'}}} \quad \text{und} \\ \chi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{e^{\frac{t\,\pi}{2\,\omega'}} - e^{-\frac{t\,\pi}{2\,\omega'}}}{e^{\frac{t\,\pi}{2\,\omega'}} + e^{-\frac{t\,\pi}{2\,\omega'}}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{a\,\pi}{2\,\omega'}\right), \end{cases}$$

wie man sich leicht überzeugt.

Zerlegt man Gleichung 13) in ihren reellen und imaginären Bestandteil, so erhält man die Gleichung der stereographischen Projektion der Kreiselbahn, ausgedrückt durch den Parameter t. Man findet schließlich:

$$14)\quad \begin{cases} u = \dfrac{2\cos\dfrac{a\pi}{2\omega'}}{\sqrt{e^{\frac{t\pi}{\omega'}} - 2\cos\dfrac{a\pi}{\omega'} + e^{-\frac{t\pi}{\omega'}}}} \cdot \sin(\varphi t + \chi) \\ v = -\dfrac{2\cos\dfrac{a\pi}{2\omega'}}{\sqrt{e^{\frac{t\pi}{\omega'}} - 2\cos\dfrac{a\pi}{\omega'} + e^{-\frac{t\pi}{\omega'}}}} \cdot \cos(\varphi t + \chi). \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung ist schon zu erkennen, daß die Kurve die Form einer Spiralen hat und zwar im wesentlichen die einer logarithmischen Spiralen. Der Radiusvektor

$$\frac{2\cos\dfrac{a\pi}{2\omega'}}{\sqrt{e^{\frac{t\pi}{\omega'}} - 2\cos\dfrac{a\pi}{\omega'} + e^{-\frac{t\pi}{\omega'}}}}$$

wird mit wachsendem t immer kleiner, der Winkel desselben mit der Ausgangsrichtung immer größer und zwar nahezu direkt proportional mit der Zeit, da φ genau und χ für große t konstant ist. Die Kreiselspitze windet sich immerfort um die Vertikale herum, sie nähert sich ihr immer mehr, ohne jemals mit ihr zusammenzufallen.

Wir werden ein klareres Bild der Kurve erhalten, wenn wir in der Gleichung statt der transzendenten die elementaren Konstanten einführen. Es ist nach 4), 5), 6) dieses Paragraphen:

$$\frac{a\pi}{2\omega'} = \frac{M \arcsin\sqrt{\dfrac{1+e}{2}}}{2M \cdot \dfrac{\pi}{2}}$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{1+e}{2}}.$$

Daraus folgt:

$$\cos\frac{a\pi}{2\omega'} = \sqrt{\frac{1-e}{2}},$$

ferner

$$\cos \frac{a\pi}{2\omega'} = -e$$

und

$$\operatorname{tg} \frac{a\pi}{2\omega'} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\frac{\pi}{2\omega'} = \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{P(1-e)}{2A}}$$

und

$$\frac{t\pi}{\omega'} = 2\sqrt{\frac{P(1-e)}{2A}} \cdot t.$$

Nun haben wir noch zu beachten, daß unsere Voraussetzung $e' = e'' = 1$ eine Beziehung zwischen den Konstanten der Gleichung

$$U_1 = -(u+e)(n^2+N^2)+2Nn(1+eu)-2AP(1-e^2)(1-u^2) = 0$$

zur Folge hat. e' und e'' sind, wie bekannt, die Wurzeln dieser in u quadratischen Gleichung. Dividiert man also durch den Koeffizienten von u^2, dann muß das konstante Glied $= 1$ sein. Daraus folgt:

$$\frac{4APe^2 - e(N^2+n^2) + 2Nn}{4AP} = 1.$$

Wenn wir uns aber vergegenwärtigen, welche Bedeutung e und e' beizumessen ist, daß sie nämlich die Grenzkreise bestimmen, zwischen welchen sich die Kreiselspitze bewegen muß, und wenn wir uns ferner erinnern, daß N und n die Impulskomponenten in Richtung der Figurenachse bzw. der Vertikalen darstellen und daß sie während der ganzen Bewegung konstant sind, so folgt für unseren Fall $e' = e'' = 1$, daß $N = n$[1]) sein muß.

Benützen wir dies in obiger Beziehung zwischen den Konstanten, so ergibt sich schließlich:

$$e = \frac{N^2}{2AP} - 1.$$

---

[1]) Dieselbe Beziehung würde sich natürlich auch aus Gleichung 12) und 14) Kl. u. S., p. 437 für den gegebenen Grenzfall ableiten lassen.

Auf diese Weise erhält man dann:

$$\frac{\pi}{2\omega'} = \sqrt{\frac{P(4AP - N^2)}{4A^2P}} = \sqrt{\frac{4AP - N^2}{2A}}$$

$$\frac{t\pi}{2\omega'} = \frac{\sqrt{4AP - N^2}}{2A} \cdot t.$$

Setzt man diese Werte in unsere Kurvengleichung ein, so geht sie über in:

$$u = \frac{2\sqrt{\frac{1-e}{2}}}{\sqrt{(e)^{\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A} \cdot t} + 2e + (e)^{-\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A} \cdot t}}} \cdot \sin(\varphi t + \chi)$$

$$v = -\frac{2\sqrt{\frac{1-e}{2}}}{\sqrt{(e)^{\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A} \cdot t} + 2e + (e)^{-\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A} \cdot t}}} \cdot \cos(\varphi t + \chi),$$

wobei

15)
$$\begin{cases} \varphi = \sqrt{\frac{P(1-e)}{2A}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{P(1+e)}{2A}} \\ \chi = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \frac{(e)^{\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A} \cdot t} - 1}{(e)^{\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A} \cdot t} + 1} \right). \end{cases}$$

Dabei soll (e) die Basis des natürlichen Logarithmensystems sein. Nun ist aber $1 + e = \frac{N^2}{2AP}$ und damit lauten schließlich unsere Formeln:

16)
$$\begin{cases} u = r \cdot \sin(\varphi t + \chi) \\ v = -r \cdot \cos(\varphi t + \chi), \end{cases}$$

wo

$$17)\quad \begin{cases} r = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{1-e}{2}}}{\sqrt{(e)^{\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A}t} + 2e + (e)^{-\frac{\sqrt{4AP-N^2}}{A}\cdot t}}} \\ \varphi = \dfrac{N}{2A} \quad \text{und} \\ \chi = \text{dem in Gleichung 15) angegebenen Werte ist.} \end{cases}$$

Diese Gleichungen beschreiben den Bewegungsvorgang vollständig. Zur Zeit $t = 0$ ist $u = 0$ und $v = -\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$, somit $r_0 = \sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$, wo r_0 den Anfangsradiusvektor der stereographischen Projektion der Kurve der Kreiselspitze bedeutet. Das entspricht aber, wie wir von Fall I schon wissen, einer Anfangsneigung ϑ_0 der Figurenachse, so daß $\cos\vartheta_0 = e$ sein muß.

Mit wachsendem t wird nun r immer kleiner, wie aus der Gleichung hervorgeht, während gleichzeitig der Winkel

$$\Phi = \varphi t + \chi$$

proportional mit der Zeit wächst.

Soll dieser Winkel übrigens von der reellen Achse aus gezählt werden, so ist noch die Konstante $\frac{\pi}{2}$ hinzuzuzählen. Wir haben im wesentlichen eine logarithmische Spirale vor uns.

Die Identität des Winkels Φ mit dem auf anderem Weg gefundenen Wert (siehe Klein und Sommerfeld, p. 336) läßt sich übrigens leicht nachweisen. Man braucht nur die bei Klein und Sommerfeld, p. 335 angegebene Gleichung 14) nach u aufzulösen und das so gefundene u in die Gleichung 15) von p. 336 einzusetzen, so erhält man genau denselben Wert für Φ wie den oben angegebenen.

§ 3. Präzession bei unendlich grossem Impuls.

III. Fall: $e'' = \infty$. Bei der Berechnung der zur Aufstellung unserer Bahngleichung notwendigen Konstanten finden wir:

1) $$\begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{e' - e}{e'' - e}} = 0 \\ k' = \sqrt{1 - k^2} = 1 \end{cases}$$

2) $$M = \sqrt{\frac{2A}{P(e'' - e)}} = 0$$

3) $$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \varphi$$

4) $$\begin{cases} \varphi_a = \arcsin \sqrt{\dfrac{1+e}{1+e'}} \\ \varphi_b = \arcsin \sqrt{\dfrac{e'' - e}{e'' - e'} \cdot \dfrac{1 - e'}{1 - e}} = \arcsin \sqrt{\dfrac{1 - e'}{1 - e}}. \end{cases}$$

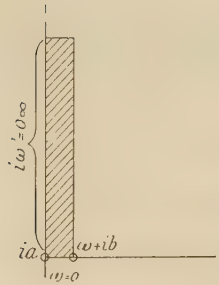
5) $$\begin{cases} \omega = M \cdot F\left(k, \dfrac{\pi}{2}\right) = M \cdot \dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \omega' = M \cdot F\left(k', \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \infty \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} a = M \cdot F(k', \varphi_a) = 0 \\ b = M \cdot F(k', \varphi_b) = 0. \end{cases}$$

a und b werden jedenfalls zu Null, solange nicht $F(k', \varphi_a)$ bzw. $F(k', \varphi_b)$ unendlich groß werden; dazu wäre nötig, daß $\varphi_a = \varphi_b = \frac{\pi}{2}$ würde, was wieder $e' = e$ zur Voraussetzung hätte. Dies soll aber hier ausgeschlossen sein.

ω wird zu Null, während ω' den unbestimmten Wert $0 \cdot \infty$ annimmt; jedenfalls läßt sich aber aussagen, daß $\frac{\omega'}{\omega} = \infty$ wird; es ist nämlich:

Fig. 6.



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{M \cdot F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)}{M \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\infty}{\frac{\pi}{2}} = \infty .$$

Wenn ich also das Periodenrechteck zeichnen will, und mache dabei ω in vergrößertem Maßstab gleich der Längeneinheit, dann wird jedenfalls die imaginäre Periode ω' unendlich groß, d. h. das Periodenrechteck artet in einen unendlich langen Streifen parallel der imaginären Achse aus (Fig. 6). Wir werden daher auch eine Ausartung der elliptischen Funktionen zu erwarten haben. Um die Bahngleichung aufstellen zu können, berechnen wir zunächst die Konstanten K und L. Nach IV' ist:

$$K = \frac{\vartheta(i\omega' - ia)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2\omega} \cdot (\omega - ib + ia)}$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \frac{i\omega' - ia}{2\omega} \pi}{q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \frac{\omega + i\omega' - ib}{2\omega} \pi} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2} + \frac{a-b}{2\omega} \pi} .$$

Die weiteren Glieder der ϑ-Reihen sind zu vernachlässigen, da ihre Koeffizienten Potenzen von q sind und

7) $$q = e^{-\frac{\omega'}{\omega} \pi} = 0 .$$

Es folgt:

8) $$K = -i \frac{\sin \frac{i(\omega' - a)}{2\omega} \pi}{\cos \frac{i(\omega' - b)}{2\omega} \pi} \cdot e^{\frac{a-b}{2\omega} \pi}$$

$$= \frac{e^{\frac{\omega' - a}{2\omega} \pi} - e^{-\frac{\omega' - a}{2\omega} \pi}}{e^{\frac{\omega' - b}{2\omega} \pi} + e^{-\frac{\omega' - b}{2\omega} \pi}} \cdot e^{\frac{a-b}{2\omega} \pi} .$$

Wir wissen schon, $\frac{\omega'}{\omega} = \infty$, es bleibt noch zu zeigen, daß $\frac{a}{\omega}$ bzw. $\frac{b}{\omega}$ endlich sind:

$$\frac{a}{\omega} = \frac{M \cdot F(k', \varphi_a)}{M \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{F(k', \varphi_a)}{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{b}{\omega} = \frac{M \cdot F(k', \varphi_b)}{M \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{F(k', \varphi_b)}{\frac{\pi}{2}}.$$

Beide Größen sind also ebenfalls nach unserer Voraussetzung $e' \neq e$ endlich. Somit verschwinden alle jene Potenzen von e, in denen $\frac{\omega'}{\omega}$ negativ auftritt. Es bleibt:

9) $$K = e^{-\frac{a-b}{2\omega}\pi} \cdot e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi} = 1.$$

Zur Berechnung von L benützen wir wieder die Gleichung IV':

$$L = i\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} - i\frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)}$$

$$i\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} = i\frac{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{i\omega' - ia}{2\omega}\pi}{q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\frac{i\omega' - ia}{2\omega}\pi} \cdot \frac{\pi}{2\omega}$$

$$= i \cdot \frac{i\pi}{2\omega} \frac{e^{-\frac{\omega' - a}{2\omega}\pi} + e^{\frac{\omega' - a}{2\omega}\pi}}{e^{-\frac{\omega' - a}{2\omega}\pi} - e^{\frac{\omega' - a}{2\omega}\pi}}.$$

Da die ersten Glieder im Zähler und Nenner verschwinden wegen $\frac{\omega'}{\omega} = \infty$, so bleibt:

$$i\frac{\vartheta'(i\omega' - ia)}{\vartheta(i\omega' - ia)} = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$-i\frac{\vartheta'(\omega + i\omega' - ib)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} = -i\frac{q^{\frac{1}{4}} \cdot \cos\dfrac{\omega + i\omega' - ib}{2\omega}\pi}{q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\dfrac{\omega + i\omega' - ib}{2\omega}\pi} \cdot \frac{\pi}{2\omega}$$

$$= +i\frac{\sin\dfrac{i\omega' - ib}{2\omega}\pi}{\cos\dfrac{i\omega' - ib}{2\omega}\pi} \cdot \frac{\pi}{2\omega}$$

$$= \frac{\pi}{2\omega} \cdot \frac{e^{-\frac{\omega' - b}{2\omega}\pi} - e^{\frac{\omega' - b}{2\omega}\pi}}{e^{-\frac{\omega' - b}{2\omega}\pi} + e^{\frac{\omega' - b}{2\omega}\pi}} = -\frac{\pi}{2\omega}.$$

Daraus ergibt sich:

10) $$L = 0.$$

Es bleibt noch der Quotient $\dfrac{\vartheta(t + i\omega + ib)}{\vartheta(t + ia)}$ der Gleichung IV′ zu bestimmen:

$$\frac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)} = \frac{q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\dfrac{t + \omega + ib}{2\omega}\pi}{q^{\frac{1}{4}} \cdot \sin\dfrac{t + ia}{2\omega}\pi} = \frac{\cos\dfrac{t + ib}{2\omega}\pi}{\sin\dfrac{t + ia}{2\omega}\pi}$$

$$= i\frac{e^{\frac{it - b}{2\omega}\pi} + e^{\frac{-it + b}{2\omega}\pi}}{e^{\frac{it - a}{2\omega}\pi} - e^{\frac{-it + a}{2\omega}\pi}}.$$

Um den Nenner reell zu machen, erweitern wir den Bruch mit dem zum Nenner konjugierten Ausdruck

$$e^{\frac{-it - a}{2\omega}\pi} - e^{\frac{+it + a}{2\omega}\pi}.$$

Dann folgt direkt:

11)
$$\frac{\vartheta(t+\omega+ib)}{\vartheta(t+ia)} = i\,\frac{\left(e^{-\frac{a+b}{2\omega}\pi}-e^{\frac{a+b}{2\omega}\pi}\right)+\left(e^{-\frac{a-b}{2\omega}\pi}-e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi}\right)\cos\frac{t\pi}{\omega}+i\left(e^{-\frac{a-b}{2\omega}\pi}+e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi}\right)\sin\frac{t\pi}{\omega}}{e^{-\frac{a\pi}{\omega}}-2\cos\frac{t\pi}{\omega}+e^{\frac{a\pi}{\omega}}}.$$

Da wir $K=1$ und $L=0$ gefunden haben, so ist zugleich auch die Bahngleichung der Kreiselspitze bekannt, und wenn man wieder rechtwinklige Koordinaten einführt, indem man $\lambda = u + iv$ setzt, so ist:

12)
$$\begin{cases} u = \dfrac{e^{-\frac{a-b}{2\omega}\pi}+e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi}}{e^{-\frac{a\pi}{\omega}}-2\cos\frac{t\pi}{\omega}+e^{\frac{a\pi}{\omega}}}\cdot\sin\frac{t\pi}{\omega} \\ v = -\dfrac{e^{-\frac{a+b}{2\omega}\pi}-e^{\frac{a+b}{2\omega}\pi}+\left(e^{-\frac{a-b}{2\omega}\pi}-e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi}\right)\cdot\cos\frac{t\pi}{\omega}}{e^{-\frac{a\pi}{\omega}}-2\cos\frac{t\pi}{\omega}+e^{\frac{a\pi}{\omega}}}. \end{cases}$$

Um uns ein genaueres Bild von der durch die Gleichungen dargestellten Kurve zu verschaffen, wollen wir den Parameter $\frac{t\pi}{\omega}$ daraus eliminieren; wir setzen zur Abkürzung:

13) $e^{\frac{a\pi}{2\omega}} = \alpha$, 14) $e^{\frac{b\pi}{2\omega}} = \beta$, 15) $\frac{t\pi}{\omega} = \varphi$.

Durch Verwendung dieser Zeichen wird:

12a)
$$\begin{cases} u = \dfrac{\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{1}{\alpha^2}-2\cos\varphi+\alpha^2}\cdot\sin\varphi \\ v = \dfrac{\frac{1}{\alpha\beta}-\alpha\beta+\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)\cos\varphi}{\frac{1}{\alpha^2}-2\cos\varphi+\alpha^2}. \end{cases}$$

Löst man jetzt die zweite Gleichung nach $\cos\varphi$ auf, so erhält man:

$$16) \qquad \cos\varphi = \frac{\frac{1}{\alpha\beta} - \alpha\beta - v\left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2\right)}{\frac{\alpha}{\beta} - 2v - \frac{\beta}{\alpha}}.$$

Nun setzt man diesen Wert in die erste Gleichung 12a) ein und erhält:

$$\sin\varphi = u\,\frac{\alpha\beta - \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^3}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^3}}{\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2v\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

oder nach Hinausheben des Faktors $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$:

$$17) \qquad \sin\varphi = u\,\frac{\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}}{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} - 2v}.$$

Durch Quadrieren und Addieren von 16) und 17) findet man schließlich nach einiger Rechnung, wobei sich noch der Faktor $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}$ forthebt:

$$18) \qquad u^2 + \left(v - \frac{\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\beta}{\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2}\right)^2.$$

Das ist aber die Gleichung eines Kreises mit dem Radius

$$19) \qquad r = \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2},$$

der seinen Mittelpunkt auf der v-Achse, also auf der imaginären Achse, hat und zwar in der Entfernung:

20) $$v_1 = \frac{\frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\beta}{\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2}.$$

Wir wollen nun r und v_1 genauer bestimmen, indem wir die Werte von α und β einführen:

19 a) $$r = \frac{e^{-\frac{a-b}{2\omega}\pi} + e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi}}{e^{-\frac{a\pi}{\omega}} - e^{\frac{a\pi}{\omega}}}$$

20 a) $$v_1 = \frac{e^{-\frac{a+b}{2\omega}\pi} + e^{\frac{a+b}{2\omega}\pi}}{e^{-\frac{a\pi}{\omega}} - e^{\frac{a\pi}{\omega}}}.$$

Nun ist aber:

21) $$a = \frac{M}{2}\left(\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)_0^{\varphi_a},$$

wie man durch direkte Integration findet, also:

$$a = \frac{M}{2}\cdot\log\frac{1+\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}}{1-\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}},$$

und da $\omega = M\cdot\frac{\pi}{2}$ ist, so ist:

22) $$\frac{a\pi}{\omega} = \log\frac{1+\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}}{1-\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}} = \log\frac{\sqrt{1+e'}+\sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e'}-\sqrt{1+e}}.$$

Ebenso findet man:

23) $$\frac{b\pi}{\omega} = \log\frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{1-e'}}{\sqrt{1-e}-\sqrt{1-e'}}.$$

Aus 22) und 23) folgt:

$$e^{\frac{a\pi}{\omega}} = \frac{\sqrt{1+e'}+\sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e'}-\sqrt{1+e}} = \left(\frac{\sqrt{1+e'}+\sqrt{1+e}}{\sqrt{e'-e}}\right)^2$$

$$e^{\frac{b\pi}{\omega}} = \frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{1-e'}}{\sqrt{1-e}-\sqrt{1-e'}} = \left(\frac{\sqrt{1-e}+\sqrt{1-e'}}{\sqrt{e'-e}}\right)^2,$$

daher:

$$e^{\frac{a+b}{2\omega}\pi} = \frac{(\sqrt{1+e'}+\sqrt{1+e})(\sqrt{1-e}+\sqrt{1-e'})}{e'-e}.$$

Ebenso:

$$e^{-\frac{a\pi}{\omega}} = \frac{\sqrt{1+e'}-\sqrt{1+e}}{\sqrt{1+e'}+\sqrt{1+e}} = \left(\frac{\sqrt{1+e'}-\sqrt{1+e}}{\sqrt{e'-e}}\right)^2$$

$$e^{-\frac{b\pi}{\omega}} = \frac{\sqrt{1-e}-\sqrt{1-e'}}{\sqrt{1-e}+\sqrt{1-e'}} = \left(\frac{\sqrt{1-e}-\sqrt{1-e'}}{\sqrt{e'-e}}\right)^2,$$

daher:

$$e^{-\frac{a+b}{2\omega}\pi} = \frac{(\sqrt{1+e'}-\sqrt{1+e})(\sqrt{1-e}-\sqrt{1-e'})}{e'-e}$$

$$e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi} = \frac{(\sqrt{1+e'}+\sqrt{1+e})(\sqrt{1-e}-\sqrt{1-e'})}{e'-e}$$

$$e^{-\frac{a-b}{2\omega}\pi} = \frac{(\sqrt{1+e'}-\sqrt{1+e})(\sqrt{1-e}+\sqrt{1-e'})}{e'-e}.$$

Indem man die so gefundenen Werte in die Gleichungen 19 a) und 20 a) einsetzt, findet man:

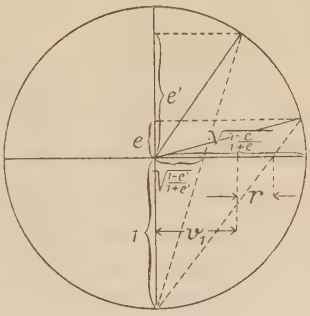
24) $$r = \frac{\sqrt{\frac{1-e'}{1+e'}} - \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{2},$$

25) $$v_1 = \frac{\sqrt{\frac{1-e'}{1+e'}} + \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{2}.$$

Diese beiden Ausdrücke sind aber geometrisch sehr leicht zu deuten. Wir wissen aus der Behandlung von Fall I, daß

$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ die stereographische Projektion desjenigen Radius der Einheitskugel ist, der den Neigungs-Cosinus e gegen die Vertikale besitzt. Ebenso ist es dann mit $\sqrt{\frac{1-e'}{1+e'}}$. Die stereographische Projektion der Kreiselspitze beschreibt also in der Äquatorebene einen Kreis, der zwischen den stereographischen Projektionen derjenigen Kugelkreise verläuft, die durch e' bzw. e bestimmt sind. Der Mittelpunkt desselben liegt auf der v-Achse in einer Entfernung vom Ursprung, die gleich der halben Summe der stereographischen Projektionen zweier Radien mit dem Neigungs-Cosinus e' bzw. e gegen die Vertikale, während sein Radius gleich der halben Differenz dieser Projektionen ist. Da aber einem Kreise der stereographischen Projektion auch immer ein Kugelkreis entspricht, so ergibt sich als Resultat:

Fig. 7.



Wird $e''=\infty$, so beschreibt die Kreiselspitze einen Kreis zwischen den beiden Kugelkreisen, die durch e' bzw. e bestimmt sind.

Auf die Lage und Größe dieses Kreises sowie auf die Umdrehungsgeschwindigkeit, ausgedrückt in den elementaren Konstanten des Kreisels, wollen wir hier nicht eingehen.

Diese spezielle Form der Kreiselbewegung, $e''=\infty$, entspricht also dem Fall, daß dem Kreisel ein Impuls erteilt wird, der gegenüber der Schwerewirkung unendlich groß ist.

§ 4. Grenze zwischen starkem und schwachem Kreisel bei aufrechter Bewegung.

Mit den bisher behandelten Fällen sind alle Möglichkeiten des einfachen Zusammenrückens zweier Verzweigungspunkte erschöpft; es könnte sich höchstens noch darum handeln, solche Fälle zu betrachten, bei denen die beiden Verzweigungspunkte in einen ausgezeichneten Punkt zusammenrücken, z. B. $e = e' = 1$, der Fall der aufrechten Kreiselbewegung. Davon soll jedoch hier abgesehen werden.

Es bleiben also noch solche Fälle übrig, bei denen mehr als 2 Verzweigungspunkte zusammenrücken. Hiefür gibt es, wie schon eingangs erwähnt, 2 Möglichkeiten, die durch die Ungleichung $-1 < e < e' < +1 < e'' < \infty$, die immer bestehen muß, bedingt sind, nämlich:

a) $e = e' = e'' = 1$,

b) $e = e'$ und $e'' = \infty$.

IV. Fall: $e = e' = e'' = 1$.

Es sollen also jetzt die 3 Verzweigungspunkte e, e' und e'' zusammenrücken; dies ist infolge der Ungleichung:

$$-1 < e < e' < +1 < e'' < \infty,$$

die zwischen den 4 Werten e, e', e'' und ∞ bestehen muß, nur möglich im Punkte $u = +1$.

Da die Annahme $e = e' = e'' = 1$ bedingen würde, daß der Kreisel ständig um die Vertikale als Drehungsachse rotieren soll, wollen wir zunächst eine Annäherung an diesen Grenzfall betrachten, indem wir annehmen, daß e und e'' etwas von e' verschieden seien, und zwar setzen wir:

$$e = e' - \varepsilon$$

und

$$e'' = e' + \delta,$$

wobei ε und δ beliebig kleine Größen sein sollen.

Unter diesen Voraussetzungen bestimmt sich der Modul des Legendreschen Integrals in folgender Weise:

1) $$k = \sqrt{\frac{e' - e}{e'' - e}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta + \varepsilon}}.$$

k ist natürlich unbestimmt, solange nicht über das Verhältnis $\varepsilon : \delta$ nähere Festsetzungen getroffen sind.

Wir wollen diese Festsetzung in folgender Weise vornehmen: Von allen möglichen Bewegungen sollen nur die betrachtet werden, bei denen die Kreiselspitze durch die Vertikale geht; es soll also e' genau gleich 1 sein.

In unserem Grenzfall muß die Gleichung $U = 0$ (p. 5) 3 gleiche Wurzeln $u = 1$ haben. Benützen wir die Form II (p. 5), so ergeben sich daraus folgende Bedingungen: $n = N$ und $N^2 = 4AP$.

Außerdem besteht aber zwischen den beiden Wurzeln e'' und e' die Beziehung (Klein u. Sommerfeld, p. 273, Gleichung 9):

$$e'' = \frac{n^2 + N^2 - 2nNe}{2AP(1 - e^2)} - e'$$

oder in unserem Grenzfalle:

2) $$e'' = \frac{4}{1 + e} - 1.$$

Die Verzweigungspunkte e und e'' nähern sich also in ganz bestimmter gegenseitiger Abhängigkeit der Grenze $e = e' = e'' = 1$. Benützt man diese Beziehung zur Berechnung des Moduls k, so ergibt sich aus 1) leicht:

3) $$\begin{cases} k = \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ infolgedessen auch} \\ k' = \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Für die übrigen Konstanten findet man dann:

4) $M = \sqrt{\frac{2A}{P(e'' - e)}}$ wird beliebig groß für $\lim e'' = e' = e = 1$.

5) $$F(k, \varphi) = F(k', \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$6)\quad \begin{cases} \varphi_a = \arcsin \sqrt{\dfrac{1+e}{1+e'}} = \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi_b = \arcsin \sqrt{\dfrac{e''-e}{e''-e'} \cdot \dfrac{1-e'}{1-e}} = \arcsin \sqrt{\dfrac{\delta+\varepsilon}{\delta} \cdot \dfrac{0}{\varepsilon}} = 0. \end{cases}$$

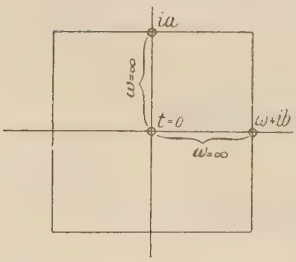
$$7)\quad \omega = \omega' = M \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$8)\quad \begin{cases} a = M \cdot F(k', \varphi_a) \\ b = 0. \end{cases}$$

Das Periodenverhältnis wird also in diesem Falle $= 1$, das Periodenrechteck wird zu einem Quadrat, und zwar zu einem Quadrat, das die ganze Ebene bedeckt, denn M wird ja für $\lim e = e' = e'' = 1$ unendlich groß, während das Legendresche Integral einen endlichen Wert annimmt Aus den Formeln 8) folgt, daß die Punkte ia und $\omega + ib$ in die Seitenmitten des Priodenquadrats zu liegen kommen. Zeichnet man das Periodenquadrat in unendlich verkleinertem Maßstab, so erhält man die Figur 8.

Das Periodenrechteck ist also in diesem Spezialfall nicht eigentlich ausgeartet, da wir von einer Ausartung bisher nur dann gesprochen haben, wenn die eine Rechteckseite im Verhältnis zur anderen unendlich groß geworden war. Da von dem Verhältnis der beiden Rechteckseiten, dem Periodenverhältnis, auch die Entwicklung der ϑ-Funktionen in Reihen abhängt, so tritt natürlich auch keine Ausartung dieser Funktionen in elementare Funktionen ein; es kann also in diesem Grenzfall die Kreiselbewegung nur durch elliptische Funktionen dargestellt werden, die in diesem Fall, da sie zu einem Periodenquadrat gehören, den Namen lemniskatische Funktionen führen.

Fig. 8.



Um uns eine eingehendere Kenntnis von dem Verhalten des Kreisels in der Grenze selbst

$$e = e' = e'' = 1$$

zu verschaffen, führen wir statt der Variablen $u = \cos\vartheta$ eine neue Variable v ein, indem wir setzen:

9) $$u = 1 - \varrho \cdot v.$$

Dabei ist ϱ ein beliebig kleiner Parameter. Der Grenzübergang geschieht dann dadurch, daß wir $\varrho = 0$ setzen.

Beschränken wir uns auch hier auf solche Bewegungen des Kreisels, bei denen die Kreiselspitze durch die Vertikale geht, so können wir auch schreiben:

10) $$\begin{cases} e = 1 - \varrho \cdot \alpha \\ e' = 1 \\ e'' = 1 + \varrho \cdot \beta. \end{cases}$$

α und β sind also die Werte der Variablen v für $u = e$ bzw. $u = e''$.

Die Zeit t, welche die Kreiselspitze braucht, um von einem Punkt e bis zu irgendeinem Punkt u ihrer Bahn zu gelangen, war:

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

e, e' und e'' sind die Wurzeln von $U = 0$ und zwar ist immer $e < u < e' < e''$, so daß man auch schreiben kann:

11) $$U = \sqrt{c\,(u - e)\,(e' - u)\,(e'' - u)}.$$

Dabei ist:

12) $$c = \frac{2P}{A}.$$

Dadurch erhält man:

$$t = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_e^u \frac{du}{\sqrt{(u - e)\,(e' - u)\,(e'' - u)}}.$$

Wenn man in diesen Ausdruck die obengenannten Größen ϱ und v einführt, so geht er über in:

$$13) \qquad t = -\frac{1}{\sqrt{c \cdot \varrho}} \int_e^u \frac{dv}{\sqrt{v(\alpha - v)(\beta + v)}}.$$

In der Grenze $\varrho = 0$ wird also t unendlich groß.

Führt man die Größen ϱ und v auch in die Integrale für ψ und φ ein (siehe p. 5), so erhält man nach Hinausheben des Faktors $1 - u$ zunächst:

$$\psi = \int_e^u \frac{N}{A(1+u)} \cdot \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Der Faktor $1 - u$ konnte gekürzt werden, da für $e' = 1$ auch $n = N$ sein muß.

Beachtet man noch, daß man in der Klammer $(1 + u)$ $u = 1 - \varrho v$ setzen kann, so wird schließlich:

$$14) \qquad \psi = -\frac{N}{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{c \cdot \varrho}} \int_e^u \frac{dv}{(2 - \varrho v)\sqrt{v(\alpha - v)(\beta + v)}}.$$

Bildet man nun den Quotienten $\frac{\psi}{t}$ und geht zur Grenze über, indem man $\varrho = 0$ setzt, so erhält man:

$$\frac{\psi}{t} = \frac{N}{2A}$$

oder

$$15) \qquad \psi = \frac{N}{2A} \cdot t.$$

Derselbe Wert ergibt sich auch, wie man sich leicht überzeugen kann, für φ.

Zwischen φ, ψ und ϑ besteht beim Kugelkreisel die einfache Beziehung:

$$16) \quad A(\varphi' + \cos\vartheta \cdot \psi') = N. \quad \text{(Klein und Sommerfeld, p. 222.)}$$

Aus Gleichung 15) ergibt sich aber:

17) $$\psi' = \frac{N}{2A}.$$

Denselben Wert hat φ'. Setzt man beides in 16) ein, so findet man nach kurzer Rechnung:

18) $$\cos\vartheta = 1$$

oder

$$\vartheta = 0.$$

Zwischen den Koordinaten X, Y und Z eines im Kreisel festen Punktes und den Koordinaten x, y und z desselben Punktes gegen das im Raum feste System bestehen Transformationsgleichungen, deren Koeffizienten durch Funktionen der Eulerschen Winkel ψ, φ und ϑ bestimmt sind:

19)

	X	Y	Z
x	$\cos\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi$	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi$	$\sin\vartheta\sin\psi$
y	$\cos\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi$	$-\sin\vartheta\cos\psi$
z	$\sin\vartheta\sin\varphi$	$\sin\vartheta\cos\varphi$	$\cos\vartheta$

Siehe Klein und Sommerfeld, p. 19, Gleichung 5).

Die Koordinaten der Kreiselspitze gegen das im Kreisel feste System sind nun

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 1.$$

Unter Berücksichtigung dieser Werte sowie der Gleichung 15) ergibt sich dann aus Gleichung 19):

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 1.$$

Figurenachse und Vertikale fallen also zusammen und der Kreisel rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\psi' = \frac{N}{2A}$ um die Vertikale.

Aus dem Umstand, daß die Zeit t, welche die Kreiselspitze braucht, um von einem Punkt des unteren Grenzkreises

bis zu irgendeinem Punkt zwischen unterem Grenzkreis und Vertikale zu gelangen, für beliebig kleines ϱ beliebig groß wird, läßt sich schließen, daß die Schleifen, aus denen sich die Bahnkurve der Kreiselspitze zusammensetzt (siehe Klein und Sommerfeld, p. 332, Fig. 55), sich mit kleiner werdendem ϱ immer enger an den unteren Grenzkreis anschmiegen, indem sie sich von einem Durchgang durch die Vertikale bis zum nächsten sehr oft um diese herumziehen, bis sie endlich in der Grenze selbst nur noch einen Punkt bilden, in den sich auch der untere Grenzkreis zusammengezogen hat.

§ 5. Pseudoreguläre Präzession.

V. Fall: $e = e'$ und $e'' = \infty$.

Es sollen also in diesem Falle die 4 Verzweigungspunkte paarweise zusammenrücken und zwar in der Weise, wie es durch die bekannte Ungleichung $-1 < e < e' < +1 < e'' < \infty$ bedingt ist, nämlich es soll e mit e' und e'' mit ∞ zusammenfallen. Es soll aber gleich vorausgeschickt werden, daß es sich hierbei nur um eine Annäherung an diesen Grenzfall handeln kann. Wir wollen also sagen, es sei $e = e' - 2\varepsilon$ und $e'' = \frac{1}{\delta}$, wobei ε und δ Größen sind, die beliebig klein gemacht werden können.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir nun die notwendigen Konstanten berechnen. Wir finden in der Grenze $\varepsilon = 0, \delta = 0$:

1) $$\begin{cases} k = \sqrt{\dfrac{e' - e}{e'' - e}} = 0, \text{ daher} \\ k' = \sqrt{1 - k^2} = 1 \end{cases}$$

2) $$M = \sqrt{\frac{2A}{P(e'' - e)}} \text{ wird beliebig klein}$$

3) $$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \varphi$$

$$4)\quad \begin{cases} \varphi_a = \arcsin \sqrt{\dfrac{1+e}{1+e'}} = \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi_b = \arcsin \sqrt{\dfrac{\varepsilon''-e}{e''-e'} \cdot \dfrac{1-e'}{1-e}} = \arcsin \sqrt{\dfrac{1-e'}{1-e}} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} \omega = M \cdot F\left(k, \dfrac{\pi}{2}\right) = M \cdot \dfrac{\pi}{2} \text{ wird gleichfalls beliebig klein} \\ \omega' = M \cdot F\left(k', \dfrac{\pi}{2}\right) = M \left(\dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} a = M \cdot F(k', \varphi_a) = M \left(\dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)_0^{\varphi_a} \\ b = M \cdot F(k' \varphi_b) = M \left(\dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)_0^{\varphi_b} . \end{cases}$$

Diese letzten 3 unbestimmten Ausdrücke lassen sich bestimmen, wenn man noch geeignete Festsetzungen über das Nullwerden von δ und ε macht. Wir wollen hierüber bestimmen, indem wir sagen, δ und ε sollen vom selben Grade sich der Null nähern. Dann zeigt eine einfache Überlegung, daß alle drei Größen ω', a und b zu Null werden, da bei allen der zweite Faktor nur logarithmisch unendlich wird; es läßt sich aber auch durch Rechnung leicht nachweisen.

Das Periodenrechteck hat sich also im Gegensatz zu § 4 bei dem vorliegenden Grenzfall auf verschwindend kleine Dimensionen zusammengezogen; es ist eigentlich nur noch ein Punkt. Trotzdem ist aber das Periodenverhältnis $\dfrac{\omega'}{\omega} = \infty$, wie sich aus 5) leicht ablesen läßt. Wenn wir also das Periodenrechteck in unendlich vergrößertem Maßstab zeichnen, und machen etwa die reelle Periode gleich der Längeneinheit, so wird die imaginäre Periode unendlich lang zu zeichnen sein, so daß also tatsächlich eine Ausartung des Periodenrechtecks in unserem Sinne eingetreten ist. Aus 6) ist zu ersehen, daß der Punkt a in die Seitenmitte auf der imaginären Achse zu liegen kommt, während der Punkt $\omega + ib$ in die rechte obere Ecke fällt (Fig. 9).

Für die Konstanten K und L finden sich folgende Werte:

$$K = \frac{\vartheta(i\omega' - ia)}{\vartheta(\omega + i\omega' - ib)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi}$$

$$= -i \frac{\sin \frac{i(\omega' - a)}{2\omega}\pi}{\sin \frac{\omega + i(\omega' - b)}{2\omega}\pi} \cdot e^{\frac{a-b}{2\omega}\pi}.$$

Dabei sind wieder wegen $q = e^{-\frac{\omega'}{\omega}\pi} = 0$ alle weiteren Glieder der ϑ-Reihen fortgelassen. Ersetzt man die trigonometrischen durch Exponentialfunktionen, so wird:

7) $$K = \frac{1 - e^{-\frac{\omega' - a}{\omega}\pi}}{1 + e^{-\frac{\omega' - b}{\omega}\pi}}.$$

Nachdem wir gefunden haben, daß ω, ω', a und b alle für $\lim e'' = \infty$ zu Null werden, erscheinen $\frac{\omega' - a}{\omega}$ und $\frac{\omega' - b}{\omega}$ in der unbestimmten Form $\infty - \infty$.

Benützt man direkt 5) und 6), so wird:

$$\frac{\omega' - a}{\omega} = \left(\log \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\right)_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} - \left(\log \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\right)_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_a}$$

$$\frac{\omega' - b}{\omega} = \left(\log \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\right)_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} - \left(\log \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\right)_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_b}.$$

Durch genau dieselben Grenzübergänge wie in § 1 findet man wie dort (Gleichung 16) und 17)):

$$\frac{\omega' - a}{M \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\omega' - a}{\omega} = \log\left(\frac{\sqrt{e'' - e} + \sqrt{e'' + 1}}{\sqrt{1 + e}}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{\omega' - b}{M \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\omega' - b}{\omega} = \log\left(\frac{\sqrt{e'' - e} + \sqrt{e'' - 1}}{\sqrt{1 + e}}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Beide werden für $\lim e'' = \infty$ positiv unendlich groß.

Man erhält daher ohne weiteres (vgl. 7)):

8) $$K = 1.$$

Die Konstante L ergibt sich wieder aus IV′:

$$L = l + l' - \frac{\pi}{\omega}.$$

Da wir hier dieselben Bedingungen haben wie im Fall I, nämlich $e = e'$, so können wir auch das dort gefundene Resultat, das für beliebiges e'' abgeleitet war, für den vorliegenden Fall anwenden. Es ist also nach Gleichung 19, § 1:)

$$L = \frac{n + Ne}{A(1 - e^2)}.$$

Es bleibt nun noch der ϑ-Quotient $\dfrac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)}$ der der Gleichung IV′ zu berechnen. Wir finden:

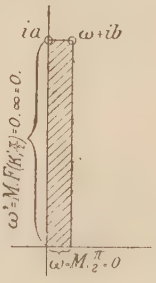
$$\frac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)} = \frac{\sin\dfrac{t + \omega + ib}{2\omega}\pi}{\sin\dfrac{t + ia}{2\omega}\pi} = \frac{\cos\dfrac{t + ib}{2\omega}\pi}{\sin\dfrac{t + ia}{2\omega}\pi},$$

woraus sich durch Einführung der Exponentialfunktionen schließlich ergibt:

$$\frac{\vartheta(t + \omega + ib)}{\vartheta(t + ia)} = i\sqrt{\frac{e^{\frac{b\pi}{\omega}} + 2\cos\dfrac{t\pi}{\omega} + e^{-\frac{b\pi}{\omega}}}{e^{\frac{a\pi}{\omega}} - 2\cos\dfrac{t\pi}{\omega} + e^{-\frac{a\pi}{\omega}}}}\,\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}.$$

Dabei ist:

Fig. 9.



9)
$$\begin{cases} \varphi_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{e^{-\frac{b\pi}{2\omega}}\cdot\sin\dfrac{t\pi}{\omega}}{e^{\frac{b\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{b\pi}{2\omega}}\cos\dfrac{t\pi}{\omega}} \\ \varphi_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{e^{-\frac{a\pi}{2\omega}}\sin\dfrac{t\pi}{\omega}}{-e^{\frac{a\pi}{2\omega}} + e^{-\frac{a\pi}{2\omega}}\cdot\cos\dfrac{t\pi}{\omega}}. \end{cases}$$

Wir können also schreiben:

$$10) \quad \lambda = i \sqrt{\frac{e^{\frac{b\pi}{\omega}} + 2\cos\frac{t\pi}{\omega} + e^{-\frac{b\pi}{\omega}}}{e^{\frac{a\pi}{\omega}} - 2\cos\frac{t\pi}{\omega} + e^{-\frac{a\pi}{\omega}}}} \cdot (\cos(Lt + \varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(Lt + \varphi_1 - \varphi_2)).$$

Um diese Gleichung auf einfachere Form zu bringen, ist es zunächst erforderlich, die Grenzwerte $e^{\frac{a\pi}{2\omega}}$ und $e^{\frac{b\pi}{2\omega}}$ genauer zu bestimmen. Es war:

$$e^{\frac{a\pi}{2\omega}} = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi_a}{1-\sin\varphi_a}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}}{1-\sqrt{\frac{1+e}{1+e'}}}}.$$

Setzt man hierin, wie bereits eingangs dieses Paragraphen erwähnt, $e' = e + 2\varepsilon$, so findet man nach einiger Rechnung:

$$11) \quad e^{\frac{a\pi}{2\omega}} = 2\sqrt{\frac{1+e}{2\varepsilon}}$$

und für $e^{\frac{b\pi}{2\omega}}$ auf demselben Wege:

$$12) \quad e^{\frac{b\pi}{2\omega}} = 2\sqrt{\frac{1-e}{2\varepsilon}}.$$

Durch Benützung dieser beiden Grenzwerte findet man:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1-e}} \cdot \sin\frac{t\pi}{\omega}}{2\sqrt{\frac{1-e}{2\varepsilon}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1-e}}\cos\frac{t\pi}{\omega}}.$$

Im Nenner dieses Bruches läßt sich nun $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1-e}} \cdot \cos\frac{t\pi}{\omega}$ gegenüber $2\sqrt{\frac{1-e}{2\varepsilon}}$ vernachlässigen, so daß schließlich bleibt:

13) $$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{1-e}\cdot\sin\frac{t\pi}{\omega}\right).$$

Da es sich um einen sehr kleinen Winkel handelt — ε soll beliebig klein sein —, so kann man statt der Funktion auch den Winkel selbst setzen:

14) $$\varphi_1 = \frac{\varepsilon}{2(1-e)}\cdot\sin\frac{t\pi}{\omega}.$$

Ferner ergibt sich:

15) $$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+e}}\cdot\sin\frac{t\pi}{\omega}}{-2\sqrt{\frac{1+e}{2\varepsilon}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+e}}\cdot\cos\frac{t\pi}{\omega}}.$$

Auch hier kann im Nenner wieder der zweite Term gegen den ersten vernachlässigt werden; setzt man dann wieder statt der Funktion den Winkel selbst, so wird:

16) $$\varphi_2 = -\frac{\varepsilon}{2(1+e)}\sin\frac{t\pi}{\omega}.$$

Die Gleichung der Bahnkurve lautet nun:

$$\lambda = i\sqrt{\frac{\frac{2(1-e)}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(1-e)}+2\cos\frac{t\pi}{\omega}}{\frac{2(1+e)}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(1+e)}-2\cos\frac{t\pi}{\omega}}}\left(\cos\left(Lt+\left(\frac{\varepsilon}{2(1-e)}+\frac{\varepsilon}{2(1+e)}\right)\sin\frac{t\pi}{\omega}\right)\right.$$
$$\left.+\,i\sin\left(Lt+\left(\frac{\varepsilon}{2(1-e)}+\frac{\varepsilon}{2(1+e)}\right)\sin\frac{t\pi}{\omega}\right)\right)$$

oder

17) $$\lambda = i\varrho\cdot(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$

wobei

18) $$\varrho = \sqrt{\frac{1+e+\varepsilon\cos\frac{t\pi}{\omega}}{1+e-\varepsilon\cos\frac{t\pi}{\omega}}}$$

und

$$19) \qquad \Phi = Lt + \frac{\varepsilon}{1-e^2} \cdot \sin \frac{t\pi}{\omega}.$$

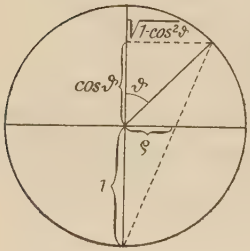
Bezeichnen wir den Winkel der Figurenachse gegen die Vertikale mit ϑ, dann ist:

$$\varrho : \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = 1 : (1+\cos\vartheta). \qquad \text{(Fig. 10.)}$$

Daraus bestimmt sich $\cos\vartheta$ als:

$$\cos\vartheta = \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} = e - \varepsilon \cdot \cos\frac{t\pi}{\omega}.$$

Fig. 10.



Den Winkel, den die Projektion der Figurenachse nach der Zeit t zurückgelegt hat, haben wir bereits Φ genannt. Somit lauten unsere Gleichungen:

$$20) \quad \begin{cases} \cos\vartheta = e - \varepsilon\cos\dfrac{t\pi}{\omega} \\ \Phi = Lt + \dfrac{\varepsilon}{1-e^2}\sin\dfrac{t\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen stimmen genau mit den bei Klein und Sommerfeld, p. 303 angegebenen überein, bis auf eine Verschiebung des Anfangspunktes um $\frac{\pi}{2}$.

Um auch die äußerliche Übereinstimmung herbeizuführen, wollen wir dieselben vereinfachenden Annahmen machen, wie sie in dem angeführten Werk gemacht sind. Nach unserer Voraussetzung soll e'' beliebig groß sein; nun haben wir aber bei der Behandlung von Fall I gefunden, daß

$$e'' = \frac{n^2 + N^2 - 2nNe}{2AP(1-e^2)} - e, \text{ wenn } e = e'.$$

Darin ist e ein echter Bruch, kann also gegen e'' vernachlässigt werden, so daß bleibt:

$$e'' = \frac{n^2 + N^2 - 2nNe}{2AP(1-e^2)}.$$

Wenn nun e'' eine sehr große Zahl sein soll, so ist das nur möglich, wenn entweder n^2 oder N^2 oder auch alle beide gegenüber AP sehr groß sind. Daß nicht etwa $e = 1$ ein sehr großes e'' zur Folge hat, lehrt eine einfache geometrische Überlegung. Der Zähler des obigen Bruches ist nämlich das Quadrat der Entfernung der beiden Endpunkte der Impulskomponenten n bzw. N in Richtung der Vertikalen bzw. der Figurenachse. Wird aber $e = 1$, so fallen Vertikale und Figurenachse und damit auch die beiden Komponenten n und N zusammen. Die Verbindungslinie ihrer Endpunkte wird damit zu Null. Es werden also Zähler und Nenner des obigen Bruches gleichzeitig zu Null und der Wert $e = 1$ braucht somit keinen beliebig großen Wert von e'' zur Folge zu haben.

Der Ausdruck für e'' läßt sich aber noch erheblich vereinfachen. Nach unserer Voraussetzung sollte e sich nur um einen sehr kleinen Betrag von e' unterscheiden, d. h. die Gleichung (siehe p. 5)

$$A^2 U = 2 A P u^3 - k u^2 + 2 (n N - A P) u + (k - N^2 - n^2) = 0$$

sollte eine Doppelwurzel $u = e$ haben.

Die Gleichung läßt sich in folgender Weise zusammenziehen, wobei noch e an Stelle von u geschrieben ist:

$$A^2 U = - (Ne - n)^2 + (k - N^2 - 2 A P e)(1 - e^2) = 0.$$

Soll sie eine Doppelwurzel haben, so muß auch $A^2 U' = 0$ sein. Somit:

$$A^2 U' = -2 N(Ne - n) - 2e(k - N^2 - 2 A P e) - 2 A P (1 - e^2) = 0.$$

Multiplizieren wir $A^2 U$ mit $2e$ und $A^2 U'$ mit $(1 - e^2)$, und addieren, so ergibt sich:

$$-2 e (Ne - n)^2 - 2 N (1 - e^2)(Ne - n) - 2 A P (1 - e^2)^2 = 0,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$A P (1 - e^2)^2 - (n - Ne)(N - n e) = 0.$$

Wir hatten schon vorher gefunden, daß für sehr großes e' entweder n^2 oder N^2 oder beide gegenüber AP sehr groß sein

müssen. Schließen wir noch den Fall $e = 0$ oder nahe Null aus, so werden wir sagen können, daß n und N stets von derselben Größenordnung sind, daß also für $e'' = \infty$ beide gegenüber AP sehr groß sein werden.

Dividieren wir nun unsere oben gefundene Gleichung durch N^2 (oder auch n^2), so finden wir:

$$\frac{AP}{N^2}(1-e^2)^2 - \frac{n-Ne}{N}\cdot\frac{N-ne}{N} = 0.$$

Darin ist der 1. Term eine sehr kleine Größe, denn wir hatten gefunden, daß N^2 sehr groß gegenüber AP sein müsse. Dann muß aber auch der 2. Term eine sehr kleine Größe sein, d. h. es muß einer der beiden Brüche $\frac{n-Ne}{N}$ oder $\frac{N-ne}{N}$ sehr klein sein, während der andere endlich bleibt.

Der erste der beiden Brüche wird beliebig klein, wenn $n - Ne$ nahe Null wird; dies ist nur möglich, wenn die Impulsachse nahe mit der Figurenachse zusammenfällt; der zweite Bruch dagegen wird beliebig klein, wenn die Impulsachse nahezu mit der Vertikalen zusammenfällt, wie aus der mechanischen Bedeutung von e klar hervorgeht.

Da der erste dieser beiden Fälle der häufigere und praktisch allein von Bedeutung ist, wollen wir auf die weitere Behandlung des zweiten Falles verzichten.

Setzen wir $n - Ne = n'$, wobei n' jetzt gegen N eine sehr kleine Größe ist und, vernachlässigen dann n'^2 gegenüber N^2, so finden wir:

$$e'' = \frac{N^2}{2AP}.$$

Mit demselben Genauigkeitsgrade kann man dann auch noch sagen:

$$e'' - e = \frac{N^2}{2AP}.$$

Damit wird aber:

$$21) \quad \omega = \sqrt{\frac{2A}{P(e''-e)}}\cdot\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{2A}{P}\cdot\frac{2AP}{N^2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{A}{N}\cdot\pi$$

und

22) $$\frac{t\pi}{\omega} = \frac{N}{A} \cdot t.$$

Unter derselben vereinfachenden Annahme kann man dann schließlich noch für $L = \frac{n - Ne}{A(1 - e^2)}$ setzen:

23) $$L = \frac{P}{N}$$ (a. a. O., p. 300—302).

Damit gehen dann unsere beiden Gleichungen der Kreiselbahn über in:

24) $$\begin{cases} \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \left(\frac{n}{N} - \frac{AP}{N^2}\sin^2\vartheta_0\right)\cos\left(\frac{N}{A}\cdot t\right) \\ \Phi = \frac{P}{A}\cdot t + \left(\frac{n}{N^2\cdot\sin^2\vartheta_0} - \frac{AP}{n^2}\right)\sin\left(\frac{N}{A}\cdot t\right), \end{cases}$$

wobei noch in die Gleichungen 20)

$$e = \cos\vartheta_0 \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{n}{N} - \frac{AP}{N^2}\left(1 - e^2\right)$$

eingesetzt ist, welch letzterer Wert bei Klein und Sommerfeld p. 301 errechnet ist.

Damit ist gezeigt, daß die Bewegung des Kreisels im Falle $e = e'$ und $e'' = \infty$ in die pseudoreguläre Präzession übergeht.

Fassen wir die Ergebnisse der Arbeit noch einmal kurz zusammen, so sehen wir, daß sich alle die speziellen Bewegungsformen des Kreisels auf die zwangloseste Weise entwickeln lassen aus der allgemeinen Gleichung der Kreiselbahn, ausgedrückt durch elliptische Funktionen. Diese besonderen Bewegungsformen entsprechen einfach bestimmten Ausartungen der Periodenrechtecke der ϑ-Funktionen, die wieder durch Zusammenrücken irgend welcher Gruppen von Verzweigungspunkten verursacht werden. Und zwar hängen das Zusammenrücken der Verzweigungspunkte und die verschiedenen ausgezeichneten Bewegungsformen in folgender Weise zusammen.

Es entspricht:

1. $e = e'$ der regulären Präzession.
2. $e' = e'' = 1$ der spiraligen Bewegungsform der Kreiselspitze, welche aus der aufrechten Bewegung des schwachen Kreisels bei verschwindend kleinem Anstoße hervorgeht.
3. $e'' = \infty$ der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels, bei dem die Schwerewirkung dem Impuls gegenüber nur sehr klein ist. (Hierher gehört auch die Bewegung des kräftefreien Kreisels.)
4. $e = e' = e'' = 1$ der aufrechten Bewegung desjenigen Kreisels, welcher auf der Grenze zwischen starkem und schwachem Kreisel steht.
5. $e = e'$ und $e'' = \infty$ der pseudoregulären Präzession.

Sind es auch nicht gerade neue Resultate, die sich durch diese Arbeit ergeben haben, und mögen vielleicht manche der Ansicht sein, daß es instruktiver sei, diese besonderen Fälle auch mit besonderen Mitteln, d. h. mit elementaren Funktionen zu behandeln, so ist es doch gerade für den Mathematiker eine Freude, zu sehen, wie alle diese speziellen Fälle auch aus den ganz allgemeinen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können.

Lebenslauf.

Ich, Valentin Scheidel, wurde am 14. März 1883 zu Wäschbacherhof, Bezirksamts Rockenhausen, geboren. Meine Schulbildung erhielt ich an der Realschule und Industrieschule zu Kaiserslautern. Nachdem ich das Reifezeugnis für den Übertritt an die Technische Hochschule erhalten hatte, besuchte ich noch die 3. Klasse der Industrieschule und war dann zwei Jahre in der Privatindustrie tätig.

Im Jahre 1904 begann ich dann mein Studium an der Technischen Hochschule in München, das ich im Jahre 1908 beendigte. Im Jahre 1909 erwarb ich mir noch nachträglich das Reifezeugnis der Oberrealschule in Augsburg.